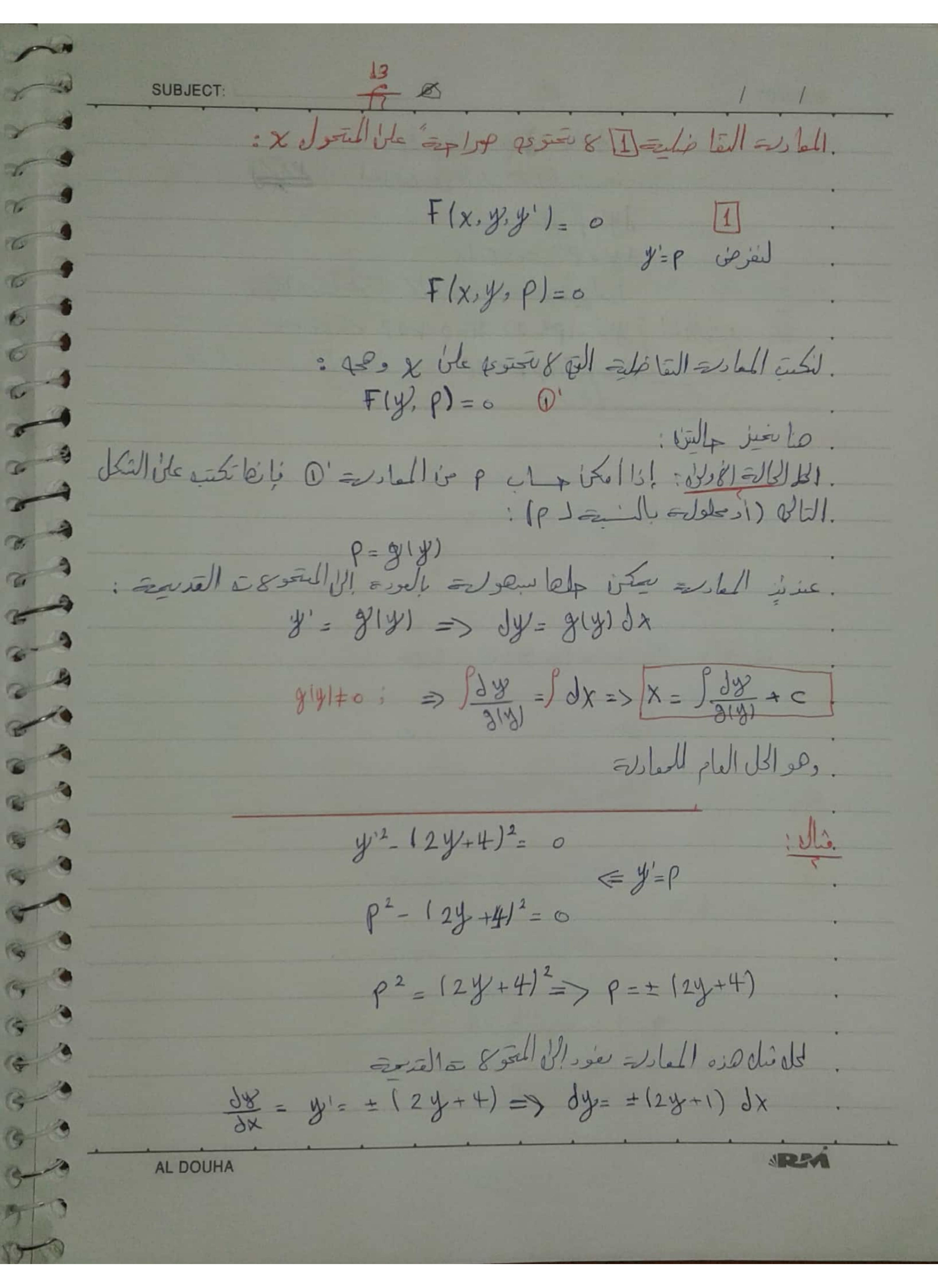


المعادلة التفاضلية [1] لا تحتوي صراحةً على المتحول x :

$$F(x, y, y') = 0 \quad \boxed{1}$$

لنفرض $y' = p$

$$F(x, y, p) = 0$$

لنكتب المعادلة التفاضلية التي لا تحتوي على x وحده :

$$F(y, p) = 0 \quad ①'$$

هنا نميز حالتين :

الحالة الأولى: إذا أمكن حساب p من المعادلة ①' فإننا نكتب على الشكل التالي (أو محلولة بالنسبة لـ p) :

$$p = g(y)$$

عندئذٍ المعادلة يمكن حلها بسهولة بالعودة إلى المتحولات القديمة :

$$y' = g(y) \Rightarrow dy = g(y)\,dx$$

$$g(y) \neq 0 ; \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int dx \Rightarrow \boxed{x = \int \frac{dy}{g(y)} + c}$$

وهو الحل العام للمعادلة

مثال:

$$y'^2 - (2y+4)^2 = 0$$

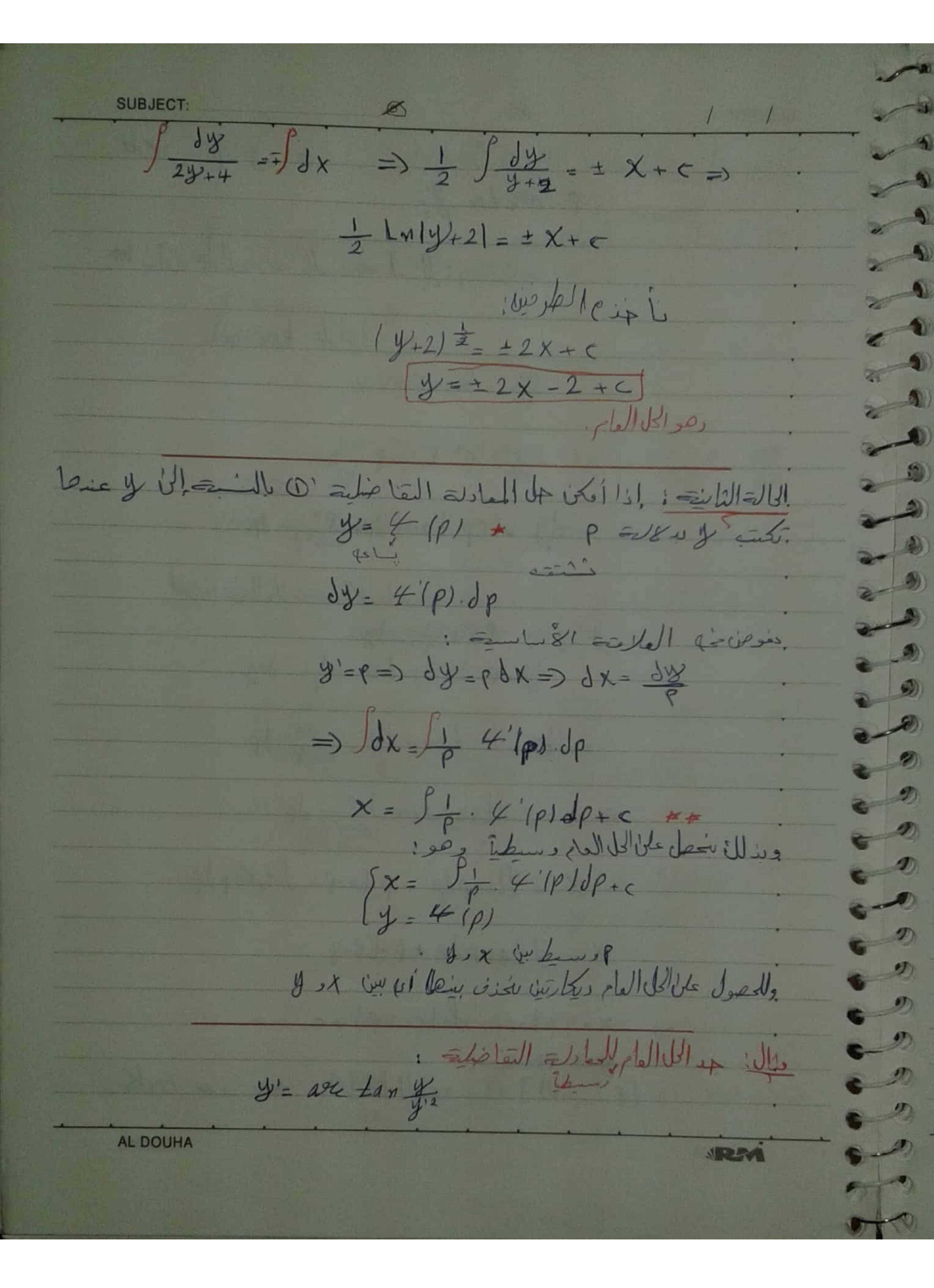
$$\Leftarrow y' = p$$

$$p^2 - (2y+4)^2 = 0$$

$$p^2 = (2y+4)^2 \Rightarrow p = \pm(2y+4)$$

لحل مثل هذه المعادلة نعود إلى المتحولات القديمة

$$\frac{dy}{dx} = y' = \pm(2y+4) \Rightarrow dy = \pm(2y+1)\,dx$$



$$\int \frac{dy}{2y+4} = \mp\int dx \Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y+2} = \pm x + c \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\ln|y+2| = \pm x + c$$

نأخذ e للطرفين:

$$(y+2)^{\frac{1}{2}} = \pm 2x + c$$

$$\boxed{y = \pm 2x - 2 + c}$$

وهو الحل العام

الحالة الثانية: إذا أمكن حل المعادلة التفاضلية ① بالنسبة إلى y عندها تكتب y بدلالة p

$y = \psi(p)$ ★

(بساي)

نشتق

$$dy = \psi'(p).dp$$

نعوض في العلاقة الأساسية:

$$y' = p \Rightarrow dy = p\,dx \Rightarrow dx = \frac{dy}{p}$$

$$\Rightarrow \int dx = \int \frac{1}{p}\,\psi'(p).dp$$

$$x = \int \frac{1}{p}\cdot\psi'(p)\,dp + c \quad ★★$$

وبذلك نحصل على الحل العام وسيطياً وهو:

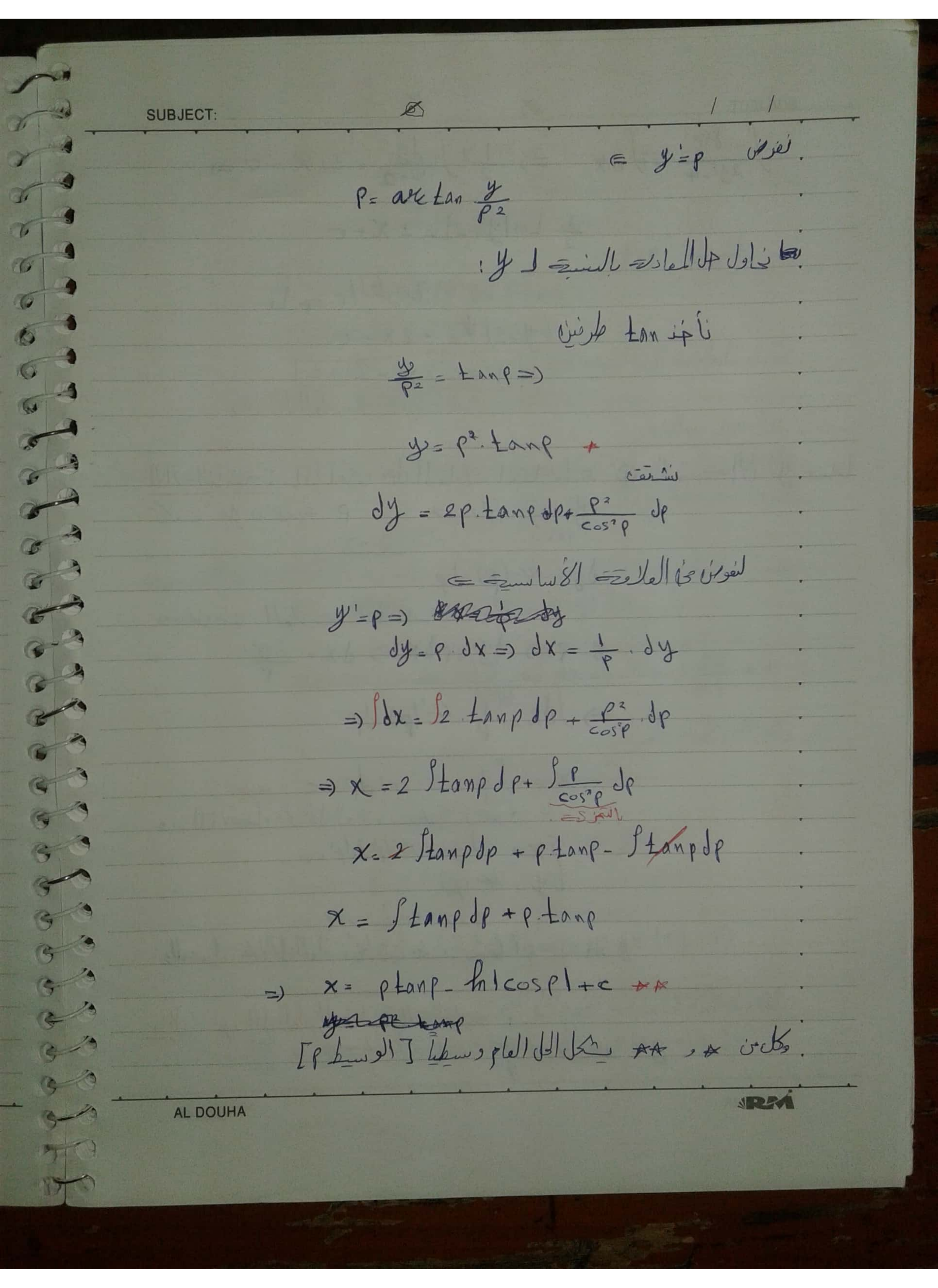
$$\begin{cases} x = \int \frac{1}{p}\cdot\psi'(p)\,dp + c \\ y = \psi(p) \end{cases}$$

p وسيط بين x و y.

وللحصول على الحل العام ديكارتياً نحذف بينهما أي بين x و y

مثال: جد الحل العام للمعادلة التفاضلية وسيطياً:

$$y' = \arctan\frac{y}{y'^2}$$



نفرض $y' = p$ ⇐

$$p = \arctan \frac{y}{p^2}$$

لنحاول حل المعادلة بالنسبة لـ y :

نأخذ tan طرفين

$$\frac{y}{p^2} = \tan p \Rightarrow$$

$$y = p^2 \cdot \tan p \quad ★$$

نشتق

$$dy = 2p \cdot \tan p \, dp + \frac{p^2}{\cos^2 p} \, dp$$

نعوض في العلاقة الأساسية ⇐

$$y' = p \Rightarrow$$

$$dy = p \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{1}{p} \cdot dy$$

$$\Rightarrow \int dx = \int 2 \tan p \, dp + \frac{p^2}{\cos^2 p} \cdot dp$$

$$\Rightarrow x = 2 \int \tan p \, dp + \int \frac{p}{\cos^2 p} \, dp$$

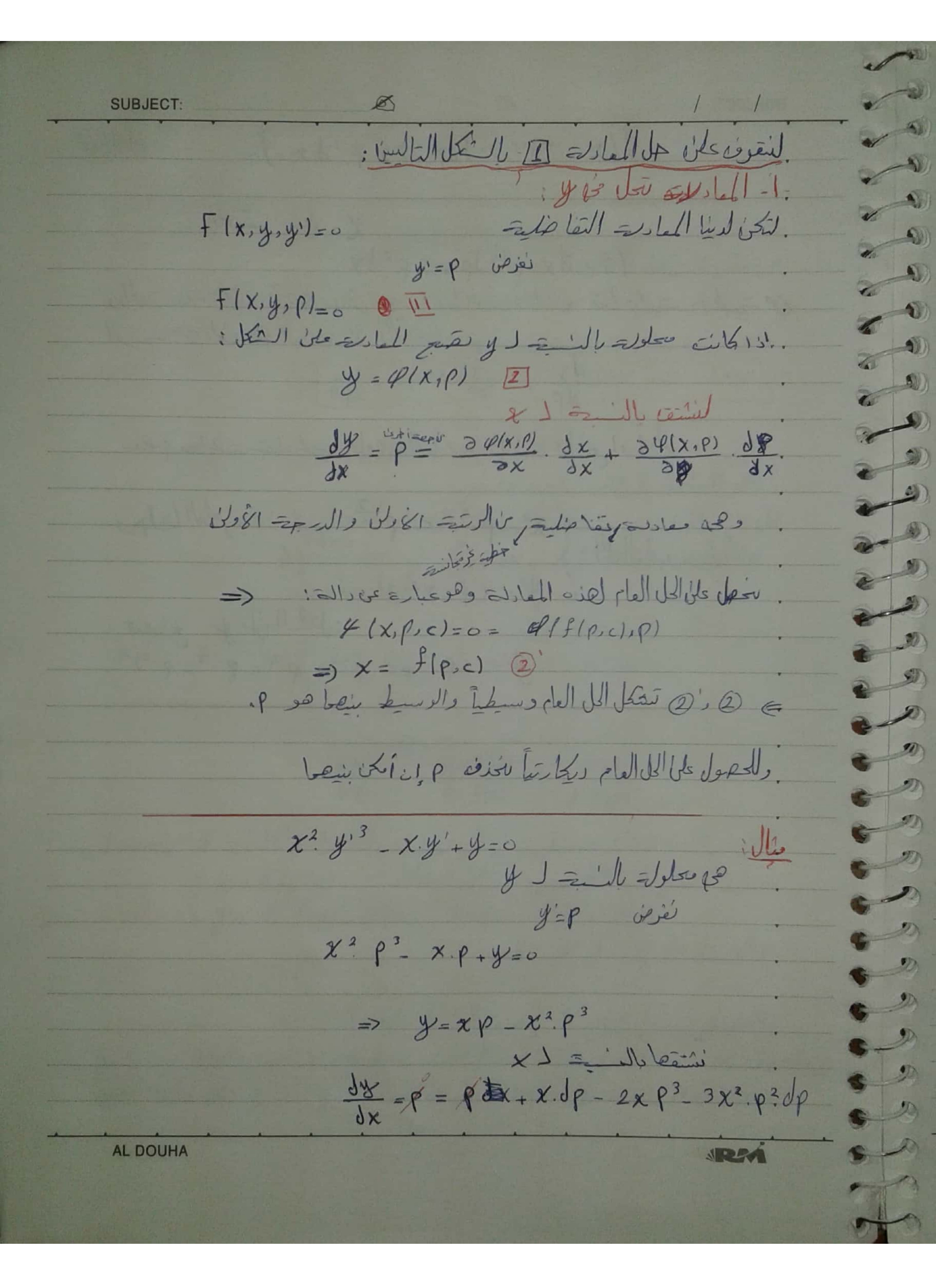
بالتجزئة

$$x = 2 \int \tan p \, dp + p \tan p - \int \tan p \, dp$$

$$x = \int \tan p \, dp + p \tan p$$

$$\Rightarrow x = p \tan p - \ln|\cos p| + c \quad ★★$$

وكل من ★ و ★★ يشكل الحل العام وسيطياً [الوسيط p]



لنتعرف على حل المعادلة [1] بالشكل التالي :

أ- المعادلة تحل حول y :

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية $F(x, y, y') = 0$

نفرض $y' = p$

$F(x, y, p) = 0$ [1]

إذا كانت محلولة بالنسبة لـ y تصبح المعادلة على الشكل :

$y = \varphi(x, p)$ [2]

نشتق بالنسبة لـ x

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{\partial \varphi(x,p)}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx} + \frac{\partial \varphi(x,p)}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx}$$

وهي معادلة تفاضلية (خطية غير متجانسة) من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

نحصل على الحل العام لهذه المعادلة وهو عبارة عن دالة : $\Rightarrow$

$\psi(x, p, c) = 0 = \varphi(f(p,c), p)$

$\Rightarrow x = f(p, c)$ (2)'

$\Leftarrow$ (2) و (2)' تشكل الحل العام وسيطياً والوسيط بينهما هو p.

وللحصول على الحل العام ديكارتياً نحذف p إن أمكن بينهما

مثال:

$x^2 \cdot y'^3 - x \cdot y' + y = 0$

هي محلولة بالنسبة لـ y

نفرض $y' = p$

$x^2 p^3 - x \cdot p + y = 0$

$\Rightarrow y = xp - x^2 \cdot p^3$

نشتقها بالنسبة لـ x

$$\frac{dy}{dx} = p = p + x \cdot dp - 2x p^3 - 3x^2 \cdot p^2 \cdot dp$$

SUBJECT: / /

$(x-3x^2 \cdot p^2)\,dp - 2x \cdot p^3\,dx = 0$

نختصر على x

$(1-3x \cdot p^2)\,dp = 2p^3\,dx$

وبالقسمة على $2p^3$ تصبح المعادلة معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى ولكن هنا الدالة x والمتحول p.

$$\frac{dx}{dp} + \frac{3}{2p}x = \frac{1}{2p^3}$$

~~وهي معادلة تفاضلية~~ لحل هذه المعادلة: إما لاغرانج أو أولر

وحلها العام.

الحل العام وسيطياً

$$\begin{cases} x = -p^{-1} + c \cdot p^{-\frac{3}{2}} \\ y = x \cdot p - x^2 \cdot p^3 \end{cases}$$

فتصبح y على الشكل:

$$y = -p^{-1} + c \cdot p^{-\frac{1}{2}} - p^3(c \cdot p^{-\frac{3}{2}} - p^{-1})^2$$